# Explicar na aula de matemática,
## um desafio que as crianças enfrentam com prazer

PATRICIA SADOVSKY

### EXPLICAR, UMA PRÁTICA SOCIAL

Explicar na aula de matemática! Que as crianças expliquem! Que argumentem! Que possam relacionar as razões que validam seus procedimentos, seus resultados, suas hipóteses. Que se encontrem com os fundamentos do trabalho que realizam. Que averiguem a lógica interna das situações às quais são convocadas. Que toquem a raiz. Que se sintam com capacidade — com liberdade, com autoridade — para intervir sobre o conhecimento. Que produzam ideias usando ideias.

Como toda disciplina, o trabalho com a matemática oferece um modo específico de construir uma relação com a verdade. Estabelece-se, assim, um aspecto central de seu valor formativo. E nessa construção a produção de explicações por parte dos alunos se torna um aspecto obrigatório. Longe de ser uma aquisição espontânea, e longe também de ser um assunto que os docentes podem ensinar de forma declarada, conseguir fazer que as crianças expliquem — relacionar, deduzindo as sentenças para validar o trabalho que vão realizando — será o resultado de convidá-las a participar de maneira contínua de um cenário no qual explicar seja uma prática cotidiana. Um cenário no qual a atividade matemática mesma seja o objeto de ensino.

A perspectiva que considera como objeto de ensino a atividade matemática situa-se em uma ideia mais ampla, que é a de conceber sempre a aprendizagem em relação à atividade que produziu aquilo que se deve aprender. Citemos Charlot, um pesquisador e pedagogo francês que mora no Brasil e trabalhou muito intensamente a questão da relação com o saber:

*Aprender é uma relação entre duas atividades: a atividade humana que produziu aquilo que se deve aprender e a atividade na qual o sujeito que aprende se engaja — sendo a mediação entre ambas assegurada pela atividade daquele que ensina ou forma. Em termos simples: para apropriar-se de um saber, é preciso introduzir-se nas relações que permitiram produzi-lo. O essencial não é repetir a própria atividade humana, tal como ela ocorre ou ocorreu, mas adotar, durante a atividade de aprendizagem, a postura (relação com o mundo, com o outro e consigo mesmo) que corresponde a essa atividade humana. Esta é uma condição necessária, mas não suficiente: é preciso, a partir dessa postura, dominar as operações específicas de tal atividade — aquelas que constituem sua normatividade. Por outro lado, o processo pode ser invertido: o domínio progressivo das operações permite, pouco a pouco, assumir a postura.*[1]

A citação de Charlot nos insere no complexo problema da construção de normas do trabalho matemático — nos ocuparemos parcialmente deste problema ao longo do artigo — e nos ajuda a tomar consciência da relação de mútuo condicionamento entre tal construção e a possibilidade de *ir compreendendo* algumas características fundamentais da atividade matemática.

Tomando esta ideia e assumindo que a resolução de problemas constitui o motor das elaborações matemáticas, apontemos alguns aspectos que selecionamos de nossa interpretação da disciplina e que consideramos relevantes para construir uma referência para pensar o trabalho da sala de aula sob esta perspectiva:

- 1. A matemática é um produto cultural e social.
- 2. Os conhecimentos matemáticos não podem ser concebidos sem os elementos de controle que regulam a atividade que os coloca em jogo (Brousseau, 1986; Balacheff, 2000; Campos Lins, 2000).[2]
- 3. Os conhecimentos são tais, uma vez que se caracterizam por suas relações com outros conceitos de seu mesmo campo teórico, e não como objetos em si mesmos. (García, 2000).[3]

1. A matemática é uma *produção cultural* porque suas elaborações estão permeadas em cada momento pelas concepções da sociedade da qual emergem e condicionam aquilo que a comunidade de matemáticos concebe em cada momento, como possível e relevante. A análise histórica é rica em episódios a esse respeito. Como exemplo, utilizemos o caso das frações. Durante o período grego, as razões de números naturais não eram consideradas números, mas sim justamente razões — relações — , no entanto, hoje, as crianças nascem em uma cultura na qual as razões de números naturais *são* números e seu esforço se concentra em adaptar-se a esta *imposição cultural*. Isto faz que a complexidade que supõe conceber um quociente como um número fique oculta em um funcionamento naturalizado pela sociedade. A matemática é também um *produto social*, porque é o resultado da interação entre pessoas que se reconhecem como pertencentes a uma mesma comunidade. As respostas que uns propõem dão lugar a novos problemas para outros, as demonstrações produzidas são validadas segundo as regras que se aceitam em certo momento na comunidade matemática. São regras que vão se transformando em função dos conhecimentos e das ferramentas disponíveis.

1. Charlot, B. *Os jovens e o saber.* Perspectivas mundiais. Porto Alegre: Artmed, 2001.

2. Brousseau, G. *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba: Universidade Nacional de Córdoba, 1986.
Balacheff, N.; Symbolic arithmetic vs algebra. In: Sutherland, R. et al. (Eds.) *Perspectives on school algebra*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
Campos Lins, R. The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of semantic fields. In: Sutherland, R. et al. (Eds.) *Perspectives on school algebra*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

3. García, R. *El conocimiento en construcción.* De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos. Barcelona: Gedisa, 2000.

2. Sobrepor os elementos de controle com o conhecimento implica afirmar que as validações, as justificativas que possam ser feitas em cada momento, e que se aproximam da produção matemática, são constitutivas dos conceitos com os quais se trabalha. Em outros termos, uma ideia é tal se existe um modo de explicá-la. Vamos nos apoiar nesta perspectiva para mostrar em que sentido as explicações que as crianças possam produzir modificam as conceitualizações que possam fazer sobre certo assunto.
3. Os conceitos não funcionam isoladamente, mas sim em uma rede, em uma organização teórica, associada a um tipo de problema para o qual as relações que foram estudadas, as escritas cujo uso foi analisado, e os problemas anteriormente resolvidos se tornam referências que vão constituindo uma trama para o presente.

Revisemos um pouco as condições colocadas e pensemos nelas ante o projeto de conceber que nosso objeto de ensino é a atividade matemática como atividade humana.

Isso nos leva a conceber o trabalho matemático da classe como a construção coletiva de uma cultura que vai sendo elaborada à medida que um grupo de alunos, conduzido por um docente que regula o trabalho e tem como dupla referência a cultura de sua classe e a cultura matemática, enfrentam problemas, concebem diferentes formas de abordá-los e de discuti-los, geram novos problemas acerca das resoluções propostas, se perguntam pelo alcance das relações produzidas, as vinculam com outras já elaboradas, exploram, formulam hipóteses, deduzem, explicam, aceitam argumentos ou se opõem a eles apoiando-se em suas próprias fundamentações...

Se analisarmos este conjunto de atividades, vemos que muitas delas supõem um plano reflexivo que toma como objeto a realização de outras. O que queremos dizer? Os alunos enfrentam problemas e para isso utilizam diferentes estratégias, às vezes convergentes, outras, nem tanto. O fato de relacionar essas estratégias já constitui um plano reflexivo sobre a resolução de problemas e pode ser fonte de novos problemas. Do mesmo modo, o fato de que se perguntem pelo alcance das relações produzidas, a aceitação ou não de argumentos, são atividades inerentemente sociais nas quais os alunos tomam como objeto de discussão e de trabalho o seu próprio trabalho. É neste terreno em que localizamos a questão das explicações na classe: o terreno da reflexão sobre a ação.

Sendo assim, explicar em matemática tem uma especificidade que deve ser objeto de aprendizagem (e em algum sentido de ensino). Em outros termos, produzir explicações matematicamente pertinentes, conseguir relacionar dedutivamente relações matemáticas para produzir novas relações não é uma aquisição espontânea dos alunos; é produto de um trabalho intencional. Neste sentido, entendemos que a elaboração de explicações por parte dos alunos é um processo no qual o tipo de explicação que sejam capazes de produzir continue evoluindo. Digamos, além disso, que trata-se de questão complexa entender uma explicação matematicamente pertinente e aquela que não o é. Não existe uma norma clara contra a qual contrastar para “controlar” as explicações. Neste sentido, as interações na classe são o apoio, regulador e motor, da produção de explicações. É claro que o papel do docente neste jogo é essencial.

O que queremos dizer quando pensamos que muitas vezes é difícil para os alunos entender o que é uma explicação matematicamente pertinente? Vejamos um exemplo:

Estamos em uma sala de aula de 5º ano. Os alunos têm uma tarefa: encontrar uma fração que esteja entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$.

Um aluno propõe $\frac{2}{3}$, resposta "correta".

Quando explica por que, diz: "o 2, que é o numerador, está entre 1 e 3, e o 3 que é o denominador, está entre 2 e 4".

Ou seja, a resposta $\frac{2}{3}$ é correta, mas a explicação não é válida.

Quando o docente aceita a resposta $\frac{2}{3}$, tenta contradizer o argumento e, para isso, lhe propõe como contraexemplo as frações:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5} \text{ e } \frac{5}{7}$$

nas quais o 4 está entre 2 e 5, e o 5 entre 3 e 7, embora $\frac{4}{5}$ não esteja entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{7}$, o aluno responde: *no seu exemplo não, mas aqui (apontando para o caso anterior) sim, é válido.*

O exemplo nos permite introduzir várias questões:

- A "explicação" que propõe o aluno justapõe dois fatos verdadeiros que não estão logicamente relacionados. Ou seja:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} \text{ e } 1 < 2 < 3 \text{ e } 2 < 3 < 4$$

No entanto, o segundo fato não explica o primeiro; não se deduz do fato de que 2 esteja entre 1 e 3, e 3 esteja entre 2 e 4, o fato de que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Em outros termos, de $1 < 2 < 3$ e $2 < 3 < 4$ não se deduz, necessariamente, que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ ou seja, o caráter de necessidade, típico de uma explicação matemática, não está presente nesta explicação. Em outras palavras, *verdade* e *razões da verdade* não são aspectos necessariamente ligados, e parte substancial do trabalho em matemática é o acesso às razões da verdade. É possível observar aqui uma tendência intelectual apontada por Piaget (1924),[4] que é a da justaposição, quer dizer, *ausência de necessidade no pensamento*.

4. Piaget, J. (1924). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant.* Paris: Delachaux et Niestlé, 1993.

- Quando o aluno afirma em seu exemplo que o argumento é válido, está mostrando que para ele a explicação não necessita ter um *caráter universal*. Quer dizer, não é necessário abranger todos os casos possíveis.
- A regra que está usando para comparar frações não lhe permite antecipar nenhuma comparação de frações. Neste sentido, sua explicação não tem um caráter antecipatório, ou seja, frente a outro caso, a regra não será suficiente para estabelecer a comparação.

Esses três componentes, o caráter *necessário, universal* e *antecipatório,* são elementos de uma explicação matemática que os alunos deverão ir elaborando como parte de seu trabalho na classe.

Sendo assim: “Como o aluno consegue entender o funcionamento desses aspectos?”. Obviamente, não é possível explicitar essas questões, explicá-las a uma criança do Ensino Fundamental. É *como resultado da participação em uma prática social, na qual as explicações fazem parte das trocas em uma classe*, que os alunos irão elaborando, ao longo do tempo, explicações cada vez mais pertinentes. Na medida em que os outros — os companheiros — regulados pelo docente, aceitem ou refutem os argumentos e na medida em que o aluno escute outros argumentos possíveis, irá compreendendo que a explicação é fonte de novos conhecimentos sobre os objetos e as relações aos quais se refere a explicação (neste caso as frações). Por sua vez, este posicionamento requer que o docente aceite que talvez o momento de produção de uma explicação não válida, não seja o momento em que o aluno a poderá revisar. *O longo prazo é constitutivo da elaboração de uma racionalidade matemática*.

Retomemos o exemplo para assinalar que quando o aluno oferece essa explicação está mostrando que analisa os numeradores e os denominadores de maneira independente. Ou seja, a explicação dada pelo aluno mostra um aspecto da forma como está conceitualizando frações, que a ação isolada de ordenar não deixa aflorar. Em outros termos, *a explicação evidencia um aspecto do conteúdo não mostrado pela ação*.

Os elementos esboçados até agora nos permitem realizar a seguinte síntese:

- 1. A produção de explicações supõe colocar os alunos em um posicionamento de reflexão sobre o trabalho matemático. Este posicionamento é fundamental na constituição de um sujeito autônomo e intelectualmente responsável. A produção de explicações está ligada à liberdade de falar, opinar e inventar sobre o assunto que se está estudando.
- 2. A dimensão social é inerente à produção de explicações em uma classe. É na troca, na possibilidade de escutar outras explicações, na receptividade de suas explicações pelos outros, nas regulações administradas pelo docente, que se elabora um sentido da explicação em matemática. Essas explicações contribuem para compreender melhor, convencer-se da verdade e convencer os demais. Na medida em que a produção de explicações supõe resolver os conflitos relacionados com o conhecimento por meio da palavra, aprender a argumentar é também participar de uma prática democrática. A produção de explicações na classe tem então um

sentido formativo essencial no que se refere à constituição de um sujeito — e de uma sociedade democrática.

- 3. A produção de explicações intervém na compreensão das estratégias e dos recursos usados para dar por válida uma questão. Ou seja, intervém no plano da racionalidade matemática.
- 4. A produção de explicações intervém na conceitualização dos objetos aos quais se refere tal explicação.

Autonomia intelectual, exercício da democracia, construção de uma racionalidade matemática e aprofundamento da conceitualização são aspectos que nos ajudam a entender em que sentido o trabalho em matemática contribui para a formação de um cidadão crítico.

## A PRODUÇÃO DE ARGUMENTOS E A ELABORAÇÃO DE NOVAS RELAÇÕES

Nossa proposta agora é mostrar, com um exemplo, em que sentido o pedido para que as crianças elaborem argumentos para sustentar a verdade de uma proposição as confronta com a necessidade de produzir novas relações, algumas das quais não foram historicamente reconhecidas como parte do repertório estabelecido quando se trata certo tema conceitual no Ensino Fundamental.

A situação que relataremos a seguir foi tomada e reelaborada com base em uma sequência do grupo Ermel,[5] no âmbito de um trabalho centrado na problemática didática de iniciação dos alunos na argumentação.

Trabalhamos com alunos do 5º ano sobre modos de reconhecer se um número é ou não divisível por 4 (quatro). As crianças tinham trabalhado questões de divisão inteira: analisaram regularidades da tabela pitagórica utilizando propriedades da multiplicação; estavam habituadas à prática de cálculo mental, a partir da qual propunham estratégias originais tanto para a multiplicação quanto para a divisão; e tinham estudado formas de reconhecer se um número é divisível por 2 (dois) e por 5 (cinco).

Convidamos as crianças a pensar como reconhecer sem realizar a divisão por 4, se um número é múltiplo de 4. O cenário pensado foi o seguinte:

Num primeiro momento, os alunos diziam números à professora e ela imediatamente respondia se este era ou não múltiplo de 4. A intenção era mostrar que a professora tinha uma maneira de saber sem fazer a conta. As crianças comprovavam na calculadora se a professora havia “adivinhado”.

A seguir, era proposto aos alunos que imaginassem que se prolongava indefinidamente a tabuada do 4. Eles deveriam encontrar um modo de saber, sem fazer a conta, se um número dado estava ou não na tabuada do 4 prolongada.

Não estávamos esperando que eles produzissem o critério convencional para reconhecer se um número é ou não divisível por 4 (observar os dois últimos algarismos); queríamos que produzissem relações que lhes permitissem fazer essa antecipação. A proposta era que, frente aos números que a professora dissera, decidissem se estavam ou não na tabuada do 4 prolongada e explicassem como sabiam. Ou

5. Ermel (Équipe de recherches mathématiques à l’école élémentaire). *Vrai?... Faux?... On en débat! De l’argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. Paris: Institut National de Recherche Pédagogique, 1999.

seja, tinham de produzir relações que lhes permitissem antecipar se o resto da divisão de um número por 4 seria ou não zero.

Na segunda etapa a professora decide propor números entre 50 e 100:

| |
|---|
| 47, 80, 84, 96, 74, 70, 92 |

Organizamos os argumentos que as crianças propuseram em três classes: *aditivos*, *multiplicativos* e baseados no *sistema de numeração*.

- *Exemplos de argumentos aditivos*:

| |
|---|
| 96 é múltiplo de 4 porque é possível pensar em: 80 + 16, que se encontram na tabuada do 4. |

A relação subjacente a este argumento é que a soma de dois múltiplos de 4 é um múltiplo de 4. A mesma é produzida pelos alunos frente à necessidade de decidir e argumentar. Neste sentido, dizemos que a situação de exigir a produção de um argumento dá lugar ao surgimento de relações que não seriam necessárias caso somente se trabalhasse com o enunciado do critério de divisibilidade por 4. Ainda que a análise da soma de múltiplos não seja um tema usualmente trabalhado a essa altura da escolaridade, acaba surgindo na classe frente à tarefa de argumentar.

| |
|---|
| 74 não é múltiplo de 4 porque 74 = 40 + 34 e 34 não é múltiplo de 4 |

De maneira análoga ao exemplo anterior, neste caso a relação que sustenta o argumento é que a soma de um múltiplo de 4 mais um número que não é múltiplo de 4 dá como resultado um número que não é múltiplo de 4. A produção do argumento torna possível discutir com toda a classe a validez da propriedade.

| |
|---|
| 144 não é múltiplo de 4 porque é 70 + 74 e nenhum dos dois é múltiplo de 4. |

Diante deste produto, algumas crianças refutaram a proposta argumentando que 144 é múltiplo de 4 porque pode-se pensar em: 72 + 72 que são múltiplos de 4.

Este argumento dá lugar à discussão da verdade ou falsidade da seguinte afirmação: a soma de dois números que não são múltiplos de 4 não é múltiplo de 4. Os alunos exploram, propõem diferentes exemplos, investigam até chegar à conclusão de que a proposição é falsa.

- *Um exemplo de argumento multiplicativo*:

| |
|---|
| 96 é múltiplo de 4 porque 96 = 4 x 24 |

A relação subjacente neste caso é que se um número pode ser expresso como 4 multiplicado por outro número, resulta múltiplo de 4. Outros alunos pensaram:

> 96 é múltiplo de 4 porque posso dividi-lo por 2 e o resultado é 48, que também é divisível por 2.

Notemos que, para esses alunos, fica claro que dividir por 4 é equivalente a dividir sucessivamente por 2, duas vezes. Com este argumento, outros alunos propuseram:

*É suficiente dividir uma vez por 2 e ver se o resultado é par; não é necessário voltar a dividir.*

Este último argumento se produz em interação com o anterior, ou seja, é o resultado da tentativa de alguns alunos ajustarem a ideia proposta por um colega. Novamente, é uma relação cujo surgimento *necessita* de outra relação já pensada na classe. É a posição de análise crítica do trabalho de outro aluno a que leva a produzir essa relação, análise que provavelmente não teria lugar da mesma maneira se a proposição viesse do docente.

⇢ *Um exemplo de argumento baseado no sistema de numeração:*
Uma criança propõe:

> 84 é múltiplo de 4 porque 8 + 4 = 12 que é múltiplo de 4.

Aqui, encontramo-nos na situação comentada anteriormente sobre a raiz das frações. Existem duas proposições verdadeiras (84 é múltiplo de 4, e 8+4 = 12, que é múltiplo de 4), mas as relações que o aluno realiza não são válidas. Quando a proposta é submetida à opinião da classe, alguns alunos propõem contraexemplos:

> Em 22, 2 + 2 = 4 e não é múltiplo de 4.
> Em 75, 7 + 5 = 12, e 75 não é múltiplo de 4.

Ao discutir esses exemplos, se estabelece na classe que somar os algarismos de um número e analisar o resultado não permite decidir se o número é ou não múltiplo de 4.

A análise das aulas nos permite estabelecer que, diante dos dissensos, os alunos potencializam suas capacidades argumentativas ao enfrentar a necessidade de convencer seus companheiros em uma situação autêntica de debate. Ao mesmo tempo, seus argumentos aprofundam a compreensão que têm das relações de divisibilidade, dando lugar à produção de diferentes propriedades que são o ponto de apoio para convencer os outros.

Notemos, finalmente, que as mesmas relações que os alunos utilizaram para decidir se um número é múltiplo de 4 poderiam ser empregadas para estabelecer qual é o resto desse número na divisão por 4. A explicação "junta" dois problemas (decidir se um número é múltiplo de 4 e decidir o resto de um número na divisão por 4) que, sem ela, parecem distantes. Vemos, então, que ao elaborar argumentos se tornam visíveis relações que a enunciação por si só não permite reconhecer.

Queremos terminar este artigo recuperando o valor formativo da prática da argumentação: se apoiar no conhecimento para analisar o próprio trabalho, para convencer os outros, para compreender mais profundamente as ideias em jogo. A reflexão de Guy Brousseau, que propomos a seguir, sintetiza nossa ambição de conceber, também, a aula de matemática como um espaço para o desdobramento da prática democrática:

*Não se trata somente de ensinar os rudimentos de uma técnica, nem mesmo os fundamentos de uma cultura científica; as matemáticas neste nível são o primeiro domínio no qual as crianças podem aprender os rudimentos da gestão individual e social da verdade. Aprendem nele — ou deveriam aprender nele — não somente os fundamentos de sua atividade cognitiva, como também as regras sociais do debate e da tomada de decisões pertinentes. Como convencer respeitando ao interlocutor; como deixar-se convencer contra seu desejo ou seu interesse; como renunciar à autoridade, à sedução, à retórica, à forma, para compartilhar o que será uma verdade comum; do que depende o uso que os outros fazem de seus conhecimentos e da maneira em que tratam estes problemas de verdade [...]. Sou dos que pensam que a educação matemática é necessária para a cultura de uma sociedade que quer ser uma democracia. O ensino da matemática não tem o monopólio nem do pensamento racional, nem da lógica, nem de nenhuma verdade intelectual, mas é um lugar privilegiado para seu desenvolvimento precoce*. (Brousseau, 1990)[6]

6. Brousseau, G.¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de la matemática (primera parte). *Enseñanza de las Ciencias (8.3)*, Barcelona, 1990.